امیرحسین اصغری، دانشگاه جان مورس لیورپول
مترجم: **اطهر فیروزیان**، کارشناس ارشد آموزش ریاضی

در ستایش علامت منفی

حدود ۲۰ سال پیش، در کلاس ریاضی یک مدرسهٔ راهنمایی، وقتی در حال تدریس عددهای منفی به گروهی از دانش‌آموزان ۱۳ ساله بودم، اتفاقی افتاد که داستان آن را بارها به‌صورت شفاهی بیان کرده‌ام. تا همین اواخر، همیشه گمان می‌کردم که این اتفاق تنها یک نمونهٔ خوب از خلق تعاملی یک مفهوم در یک کلاس ریاضی است. اما در یکی از پژوهش‌های اخیرم دربارهٔ تاریخ عددهای منفی [اصغری، ۲۰۱۹]، بخش به نظر بدیهی این داستان، یعنی خود عددهای منفی، به شکل جدیدی برایم روشن شد. در حقیقت به تعدادی از مزیت‌های بازنمایی رایج این عددها با یک علامت منها در مقابل آن‌ها، پی بردم.

ممکن است صحبت دربارهٔ مزیت‌های چنین بازنمایی آشنایی، عجیب به نظر برسد. برای مثال، «واژه‌نامهٔ استانداردهای ایالتی هستهٔ مشترک برای ریاضی[۱]» (۲۰۱۰)، عددهای صحیح را به شکل زیر تعریف می‌کند:

عدد صحیح[۲]: عددی که به شکل a یا a- قابل نمایش است، به ازای هر عدد حسابی a [Asghari, 2019: 13-16].

پس به نظر می‌رسد عددهای منفی با یک علامت منها در کنار آن‌ها تعریف می‌شوند و به همین دلیل، ناچاریم «منفی سه» یا «منهای سه» را به‌صورت ۳- بازنمایی کنیم. اما می‌توانستیم برای تمییز بین «منهای سه»، مثلاً در «پنج منهای سه» و «منفی سه» به‌عنوان یک عدد مستقل، از ۳- استفاده کنیم. یا حتی می‌توانستیم از دو رنگ متفاوت برای تفاوت قائل شدن میان عددهای مثبت و عددهای منفی بهره بگیریم؛ همان‌طوری که چینی‌ها بیش از دو هزار سال پیش از رنگ مشکی برای عددهای منفی و از قرمز برای عددهای مثبت استفاده می‌کردند [Joseph, 2010]. پس چرا ما نماد a- را به جای هر نماد دیگری برای بازنمایی عددهای منفی آموزش می‌دهیم؟ گذشته از این‌ها، می‌دانیم که استفاده از نماد مشابه برای عملگر (تفریق) و یک نوع عدد (عدد منفی) ممکن است برای دانش‌آموزان گیج‌کننده باشد.

اگر عددهای منفی به روش دیگری نمایش داده شوند، چه اتفاقی می‌افتد؟ در اینجا ابتدا داستان دانش‌آموزانی را می‌گویم که نادانسته (حداقل در ابتدا)، بازنمایی دیگری از عددهای منفی را تجربه کردند. سپس بازنمایی اختراعی آن‌ها را با بازنمایی استاندارد مقایسه می‌کنم و در مورد جنبه‌های مثبت و منفی استفاده از علامت منها برای بازنمایی عددهای منفی شرح می‌دهم. مکالمه‌های زیر نعل به نعل نیستند، ولی براساس اتفاقات واقعی هستند.

سؤال

معلم جوان، که من هستم، به بچه‌ها می‌گوید: «به این جدول نگاه کنید.»

					$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$			
					۳	۹	۲۷			

«از چپ به راست، عددهای هر خانه سه‌برابر می‌شوند و از راست به چپ، بر سه تقسیم می‌شوند. بنابراین می‌توانیم خانه‌های ردیف دوم جدول را در دو جهت کامل کنیم.»

					$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$	$۳^{۵}$	
		$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

«می‌دانیم که در خانهٔ بالای ۸۱، عدد $۳^{۴}$ و بالای ۲۴۳ عدد $۳^{۵}$ قرار می‌گیرد. اما در خانهٔ بالای ۱ یا بالای خانه $\frac{۱}{۳}$ چه عددی بگذاریم؟ به عبارت دیگر، چه توانی از ۳ با ۱ برابر می‌شود؟

				$۳^{\frac{۱}{۲}}$	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$	$۳^{۵}$	
		$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

اولین الگو

تعدادی از دانش‌آموزان (شـــاید نیمی از کلاس) پاسخ دادند: «ببینید! وقتی از $۳^{۲}$ به $۳^{۱}$ حرکت می‌کنید، توان نصف می‌شود؛ پس خانهٔ بعدی باید $۳^{\frac{۱}{۲}}$ باشد.»

		$۳^{\frac{۱}{۸}}$	$۳^{\frac{۱}{۴}}$	$۳^{\frac{۱}{۲}}$	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$	$۳^{۵}$	
		$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

آن‌ها تصدیق کردند: «درســـت است که وقتی از $۳^{۳}$ به $۳^{۲}$، یا از $۳^{۴}$ بـــه $۳^{۳}$ حرکت می‌کنیم، این الگو وجود ندارد (می‌بینیم که ۳، نصف ۴ نیست)، اما مهم نیست. در حال حاضر خانه‌های سمت چپ $۳^{۱}$ برای ما اهمیت دارند.»

$۳^{÷۴}$	$۳^{÷۳}$	$۳^{÷۲}$	$۳^{÷۱}$	$۳^{۰}$	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$	$۳^{۵}$	
$\frac{۱}{۳^{۴}}$	$\frac{۱}{۳^{۳}}$	$\frac{۱}{۳^{۲}}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

«خانه‌های سمت راست $۳^{۲}$ از یک الگو پیروی می‌کنند (هر بار، به توان عدد سه یکی اضافه می‌شود) و خانه‌های سمت چپ $۳^{۲}$ از الگوی دیگری پیروی می‌کنند (هر بار، توان نصف می‌شود).»

من گفتم: «اگر هدف ما فقط پر کردن خانه‌ها باشد، موفق شـــده‌ایم. اما در این صورت، یـــک ویژگی خیلی مفید را که در خانه‌های سمت راســـت جدول داریم، از دست می‌دهیم: برای ضرب دو عدد از خانه‌های ردیف بالا (مثلاً $۳^{۲۷}$ و $۳^{۱۰}$) می‌توانیم پایه را بنویسیم و توان‌ها را جمع کنیم؛ یعنی: $۳^{۲۷}×۳^{۱۰}=۳^{۳۷}$. این ویژگی در خانه‌های سمت چپ وجود ندارد. شاید بتوانیم به یک رابطه یا روش هوشمندانه برای پیدا کردن حاصل $۳^{\frac{۱}{۱۲۸}} × ۳^{\frac{۱}{۳۲}}$ برســـیم؛ چیزی که فقط با دانستن $\frac{۱}{۱۲۸}$ و $\frac{۱}{۳۲}$ به دست بیاید. اما این رابطه هرچه که باشـــد، سخت‌تر از جمع دو عدد است.»

(همچنین، حواسم به یک مفهوم مهم‌تر بود: بعداً می‌خواهیم با معنی دیگری از $۳^{\frac{۱}{۲}}$ کار کنیم که در آن داریم:

$$۳^{\frac{۱}{۲}} × ۳^{\frac{۱}{۲}} = ۳$$

اما می‌فهمم که دانش‌آموزان دیگر می‌خواهند چیزی بگویند. شاید آن‌ها الگوی دیگری مشاهده کرده‌اند؛ الگویی که تا این حد منفصل نباشد.

دومین الگو

بقیهٔ دانش‌آموزان گفتند: «وقتـــی از خانهٔ $۳^{۲}$ به $۳^{۱}$ حرکت می‌کنیـــم، از توان ۳ یکی کم می‌شـــود. پس عـــدد خانهٔ بعدی می‌شود $۳^{۰}$.»

مـــن گفتم: «توجه کنیـــد! وقتی از $۳^{۳}$ به $۳^{۲}$ یـــا از $۳^{۴}$ به $۳^{۳}$ می‌رویـــم، هم این الگو برقرار اســـت (می‌بینید کـــه ۳ یکی از ۴ کمتر اســـت). به‌علاوه، حالا می‌توانیـــم در $۳^{۱}×۳^{۰}$ توان‌ها را جمع کنیم و به $۳^{۱}$ برســـیم، و این همان چیزی است که می‌خواهیم ($۳^{۱} = ۳^{۰+۱} = ۳^{۱} × ۳^{۰}$ و $۳ = ۳ × ۱$). خب حالا تـــوان ۳ در خانهٔ بالای $\frac{۱}{۳}$ چیست؟»

آن‌ها پاسخ دادند: «اگر بخواهیم الگو را به همین شکل ادامه دهیـــم، در این مورد توان ۳ باید یکی کمتر از صفر باشـــد؛ اما ما نمی‌توانیم یکی کم‌تر از صفر داشته باشیم، می‌توانیم؟»

و ناگهان یک پیشنهاد مطرح شد؛ پیشنهادی که هنوز هم بعد از ۲۰ سال به‌صورت خوشایندی از آن شگفت‌زده‌ام.

یکی از دانش‌آموزان فریاد زد: «ببینید! $۳^{۱}$ یعنی فقط ۳. $۳^{۲}$ یعنی دو تا ۳ در هم ضرب شـــوند. ما می‌توانیم آن‌ها را به شکل $۳^{×۱}$ و $۳^{×۲}$ نمایش دهیم. پس چون $\frac{۱}{۳}$ یک تقسیم است، می‌توانیم آن را به شکل $۳^{÷۱}$ و $\frac{۱}{۳^{۲}}$ را به‌صورت $۳^{÷۲}$ نشان دهیم!»

چون پیش‌تر از $۳^{۲}$ برای $۳^{×۲}$ اســـتفاده کـــرده بودیم، توافق کردیم که برای قســـمت راست جدول همان نماد آشنای قبلی را به کار بریم.

				$۳^{۰}$	$۳^{۱}$	$۳^{۲}$	$۳^{۳}$	$۳^{۴}$	$۳^{۵}$	
		$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

کاری که با این نماد اختراعی کردیم

این نماد (که آن زمان پذیرفتم) شباهت‌های خاصی به نماد اســـتانداردی داشـــت که در ذهنم بود. مهم‌ترین شباهتشان این بـــود که با این نماد، قانون جمع توان‌ها هنـــگام ضرب در هر دو ســـمت جدول برقرار می‌شد. برای مثال، برای پیدا کردن حاصل $۳^{÷۲۷} × ۳^{۱۰}$ می‌توانیم پایه را بنویسیم و توان‌ها را با هم جمع کنیم: $۳^{÷۱۷}$، یـــا همان $\frac{۱}{۳^{۱۷}}$ و این قانون بـــرای هر پایه‌ای کار می‌کند.

سپس با یک قاعدهٔ کلی که در ذهن داشتیم، شروع به کاوش در نحوهٔ انجام محاسبه با این موجودات جدید کردیم: می‌خواستیم قوانینی که از توان می‌دانستیم را بی‌کم و کاست حفظ کنیم. ضرب عددهای توان‌دار به ما جمـــع این موجودات جدید را می‌دادند و تقسیم عددها ما را به تفریق آن‌ها رساند. توانِ توان، به ضرب منجر شد و تقسیم به‌عنوان عکس عمل ضرب ظاهر شد.

از آنجا که محاســـبهٔ توانِ توان، استدلال ریاضی مفیدی برای یکی از معروف‌ترین قوانین مربوط به عددهای منفی را در اختیارمان قرار می‌دهد، توضیح آن ارزشمند است.

می‌خواهیم هنگام محاسبه توانِ توان، پایه را نگه داریم و توان‌ها را در هم ضرب کنیم. اجازه دهید این قانون را روی $(۳^{÷۴})^{÷۵}$ اعمال کنیم. $(a^{÷۴})^{÷۵}$ باید بشـــود $a^{(÷۴)×(÷۵)}$ اما حاصل $(÷۴)×(÷۵)$ چیست؟ با هم ببینیم.

$$(a^{÷۴})^{÷۵} = \frac{۱}{(a^{÷۴})^{۵}} = \frac{۱}{a^{÷۲۰}} = a^{۲۰}$$

پس باید داشته باشیم: $(÷۴)\times(÷۵) = ۲۰$

ما تمام این محاسبه‌ها را در کلاس انجام دادیم. در این مرحله، سؤال اصلی برای من (به‌عنوان معلم) این بود که چرا و چگونه باید نماد استاندارد یا همان علامت منها را معرفی کنم.

چرا

علامت‌هایی که به اشتراک گذاشته می‌شوند، نقطهٔ کلیدی برای یک ارتباط اجتماعی موفق هستند. اگر هر کدام از ما نمادهای مختص خودمان را داشـــته باشیم، به زودی هیچ‌کس نمی‌تواند منظور دیگری را بفهمد و ریاضیات به یک بازی رمزگشایی تبدیل می‌شود. بنابراین هر مفهوم با مجموعه‌ای از نمادهای مورد توافق همراه می‌شـــود که یکی از آن‌ها نمایش ۱- برای پاسخ معادلهٔ s+۱=۰ است، نه ۱÷. اما آیا انتخاب این نماد برای عددهای منفی، با توجه به شـــباهت آن با نماد تفریق، عاقلانه اســـت؟ در نهایت شـــگفتی، دلیل اصلی انتخاب علامت - برای نمایش عددهای منفی، همین استفادهٔ دو پهلوست.

معمولاً وقتـــی برای اولین بار در حـــال کاوش در عددهای توان‌دار هســـتید، با عددهای منفی مواجه نمی‌شـــوید. و از نظر تاریخی، قوانین علامت‌ها ابتدا در محاســـبه‌های جبری و قبل از پذیرش عمومی عددهای منفی مورد استفاده قرار گرفت [اصغری، ۲۰۱۹]. برای مثال، وقتی عملیات روی عددهای طبیعی را درک کنیـــم، ترکیب آن‌ها، مثلاً ضـــرب دوجمله‌ای‌ها نیز امکان‌پذیر می‌شود:

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd$$
$$(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$$

هیچ یک از این تســـاوی‌ها به دانش عددهای منفی نیازی ندارد و درســـتی هر کدام را می‌توان به شکل هندسی نشان داد. عبارت +bd در (a-b)(c-d) از این قانون نتیجه می‌شود که «ضرب منها در منها می‌شود جمع» (نه این قانون که «ضرب منفی در منفی می‌شود مثبت»). در اینجا دانش عددهای صحیح مورد نیاز نیســـت و فقط علامت‌ها مهم هستند. این قانون را روی عبارتی مثل (۷-۳)(۵-۲) هم می‌توانیم اعمال کنیم که در حوزهٔ عددهای طبیعی معنی‌دار نیست و به شکل هندسی رایج بازنمایی نمی‌شود. می‌توانیم چشم‌بســـته قوانین را روی علامت‌ها به کار ببریم و به نتیجه‌برسیم:

$$\begin{aligned}(۲-۵)(۳-۷) &= ۲\times۳-۲\times۷-۵\times۳+۵\times۷\\ &= ۶-۱۴-۱۵+۳۵ = ۱۲\end{aligned}$$

جـــدا از ضرب اصلی، همه چیـــز در این زنجیره در محدودهٔ عددهای طبیعی معنی‌دار اســـت. پس عبارت (۷-۳)(۵-۲) هر معنی و هر نتیجه‌ای که داشته باشد، حتماً برابر با ۱۲ است.

می‌توانســـتیم حاصل این عبارت ضربی را با استفاده از نماد اختراعی دانش‌آموزانم محاســـبه کنیم. چون (۵-۲) توان عبارت $a^{۲} \div a^{۵} = a^{۲}\times\frac{۱}{a^{۵}}$ اســـت، پـــس می‌توانیم توان را به شـــکل $(۲+÷۵)$ هم بنویسیم و داریم:

$$(۲-۵)(۳-۷) = (۲+÷۵)(۳+÷۷)$$

فرایند انجام این ضرب به شکل زیر ادامه پیدا می‌کند:

$$\begin{aligned}&(۲-۵)(۳-۷) = (۲+÷۵)(۳+÷۷) =\\ &۲\times۳+۲\times÷۷+÷۵\times۳+÷۵\times÷۷ =\\ &۶+÷۱۴+÷۱۵+۳۵ =\\ &۶-۱۴-۱۵+۳۵ =\\ &۱۲\end{aligned}$$

با علامت ـ دیگر حتی لازم نیســـت عبارت (۷-۳)(۵-۲) را به شـــکل(۷- +۳)(۵- +۲) بنویســـیم. تنها چیزی که نیاز داریم این اســـت که بدانیم، چه زمانی علامت‌های منها را در هم ضرب می‌کنیم. درواقع ما آن‌ها را نه به‌عنوان علامت تفریق، بلکه به‌عنوان علامت‌های ۵ و ۷ ضرب می‌کنیم. در حقیقت، پیش‌دانسته‌های ما از عددهای صحیح برای انجام همهٔ محاسبه‌های عددهای صحیح کفایت می‌کند و نیازی به یادگیری قوانین جدید نیست.

نتیجهٔ‌داستان

فکر کردن بـــه عددهای منفی به‌عنـــوان منهای عدد، یک انعطـــاف فرایندی با خود به همراه مـــی‌آورد. البته چون در نظر گرفتن منهای عددها به‌عنوان عددهای منفی ممکن است یک مانع مفهومی برای ورود دانش‌آموزان به جبر متغیرها ایجاد کند، از لحاظ آموزشـــی باید در این موضوع احتیـــاط کرد [اصغری، ۲۰۱۹]. آگاهی از اینکه چرا علامت – به کار می‌رود و چرا نسبت به علامت‌های مشابه خود بهتر است، ممکن است به دانش‌آموزان کمک کند، یک عدد منفی را به‌عنوان عددی مستقل ببینند؛ نه فقط به‌عنوان عددی حسابی که به علامت منها مجهز شده‌است. در نهایت به دانش‌آموزانم گفتم از a– استفاده کنند تا بتوانند با دیگران ارتباط ریاضی‌وار برقرار کنند. بنابراین فقط گفتم: «از این لحظه به بعد، به جای ÷ از – اســـتفاده می‌کنیم!» حالا به لطف این بازنگری، می‌توانم به شکل بهتری از نمادی که اختراع کرده بودیم، به سمت نماد استاندارد حرکت کنم.

پی‌نوشت‌ها

1. Common Core State Standards for Mathematics
2. integer

منابع

1. Asghari, A. H. (2019). Signed numbers and signed letters in algebra. *For the learning of mathematics: an international journal of mathematics education*, 39(3), 13- 16.
2. Joseph, G. G. (2010). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. Princeton University Press.